**№ 3 дәріс**

## Монотонды тізбектер.

Егер $\{x_n\}$ тізбегінің мүшелері $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, теңсіздігін қанағаттандырса, онда оны әспелі, ал $x_n \le x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, болса, онда оны кемімейтін тізбек деп атайды. Егер тізбек мүшелері $x_n > x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$болса, онда оны кемімелі тізбек деп, ал $x_n \ge x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, болса, оны әспейтін тізбек деп айтады. Мұндай тізбектер бірсарынды деп аталады да, оның әспелі және кемімелі тізбектері қатаң бірсарынды деп аталады.

$\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шенелген немесе жоғарыдан шектелген деп аталады, егер M саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $x_n < M$ болса, $\{x_n\}$ тізбегі төменнен шенелген немесе төменнен шектелген деп аталады, егер $m$ саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $m < x_n$ болса.

Бірсарынды тізбек шегінің бар болуы туралы Вейерштрасс критерийі деп аталатын маңызды негізгі теореманы келтірейік.

**1-теорема (Вейерштрасс критерийі).** Кемімейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның жоғарыдан шектеулі, ал әспейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның төменнен шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

**Дәлелдеуі. Қажеттілігі**. Тізбек жинақты болса, оның шектеулі болатынын тізбектің жалпы қасиеттерінде дәлелдегенбіз.

***Жеткіліктігі.*** Жеткіліктігін кемімейтін тізбек үшін дәлелдейік. Айталық $\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шектелген болса, онда оның дәл жоғарғы шекарасы $s = \sup\limits_{n\in \mathrm{N}} x_n$ бар. Ал дәл жоғарғы шекара анықтамасы бойынша

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_N \in \{x_n\}\ (s - \varepsilon < x_N \le s)$.

Тізбек кемімейтін болғандықтан $\forall n > N$ үшін $s - \varepsilon < x_N \le x_n \le s$, яғни $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s = \sup\limits_{n\in \mathrm{N}} x_n$. Дәл осылай әспейтін тізбек үшін де дәлелдеуге болады. Бұл жағдайда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in \mathrm{N}} x_n$.

Бірсарынды тізбектер бір жақты шенелген, сондықтан кемімейтін тізбектің жоғарыдан, ал әспейтін тізбектің төменнен шектеулі болуы тізбектің шектеулі болуымен тең мағыналы.

Бірнеше маңызды мысалдар келтірейік.

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$, егер $q > 1$ болса. Шынында да, егер $x_n = \frac{n}{q^n}$ десек,

$x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq} x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ал $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \frac{1}{q} < 1$ болғандықтан, $N$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $\frac{n+1}{nq} < 1$, сондықтан $x_{n+1} < x_n$, $\forall\, n > N$. Тізбектің саны ақырлы мүшелерінің тізбек жинақтылығына әсері болмағандықтан, бізге $x_{N+1} > x_{N+2} > \ldots$ тізбегінің шегін тапсақ болғаны. Бұл тізбек мүшелері оң, демек, төменнен шектеулі екенін көреміз, сондықтан жоғарыдағы Вейерштрасс критерийінен оның шегінің бар екені шығады. Айталық, ол шек $a$ болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = a$ болсын. Сонда

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} a,$$

мұнан $\left(1 - \frac{1}{q}\right) a = 0$. Демек, $a = 0$.

**2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Шынында да, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (1 \le n < (1+\varepsilon)^n)$.

Сондықтан $n > N$ үшін $1 \le \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, демек, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Егер $q = 0$ болса, онда тұжырым айқын. Ал $\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!}$ болғандықтан шектің нөлге тең екенін тек $q > 0$ үшін ғана дәлелдесек болғаны. Егер $x_n = \frac{q^n}{n!}$ десек, онда $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$. Ал $q$ қандай болмасын $n > N$ болғанда $\frac{q}{n+1} < 1$ болатын $N$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $x_{n+1} < x_n$ теңсіздігін аламыз. Мүшелері оң болғандықтан, бұл тізбек төменнен шектелген, сондықтан шегі бар және ол $a$ болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = a$. Сонда $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot a = 0$, демек, $a = 0$.

## Тізбектің жоғарғы және төменгі шектері, қасиеттері. Тізбектің жинақтылық критерийі. Фундаментальдық тізбек. Коши критерийі.

Біз Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша шектеулі тізбектен жинақталатын ішкі тізбек бөліп алуға болатынын көрдік. Ал, егер тізбек шектелмеген болса ше? Оған мына теорема жауап береді.

**1-теорема.** Кез-келген нақты сандар тізбегінен әрқашанда жинақталатын немесе шексіздікке ұмтылатын тізбек бөліп алуға болад.

**Дәлелдеуі.** Бұл теореманың бірінші жартысы жоғарыдағы Больцано-Вейерштрасс теоремасы, ал $\{x_n\}$ тізбегінің шектеусіз болуы бұл теореманың жаналығы. Сондықтан да осы жағдайын ғана дәлелдейміз.

Айталық $\{x_n\}$ тізбегі шектеусіз болсын. Онда кез-келген $k \in \mathbb{N}$ арқылы $|x_{n_k}| > k$ және $n_k < n_{k+1}$ болатын нөмірлер $n_k \in \mathbb{N}$ таңдап алуға болады. Сонда шексіздікке ұмтылатын $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегін аламыз. Теорема дәлелденді.

Айталық бізге нақты сандардың кез-келген $\{x_k\}$ тізбегі берілсін. Егер ол төменнен шектеулі болса, онда $i_n = \inf_{k \ge n} x_k$ тізбегін қарастыруға болады. Ал $i_n \le i_{n+1}$ болғандықтан $\{i_n\}$ тізбегінің ақырлы шегі $\lim_{n\to\infty} i_n = l$ немесе $\lim_{n\to\infty} i_n = +\infty$ шегі бар.

$l = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \ge n} x_k$ санын $\{x_k\}$ тізбегінің төменгі шегі деп атайды да, $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k$ немесе $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k$ арқылы белгілейді. Егер $i_n \to +\infty$ болса, онда тізбектің төменгі шегі $+\infty$ деп атау қабылданған және $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = +\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = +\infty$ деп жазу қабылданған. Егер $\{x_k\}$ тізбегі төменнен шектелмеген болса, онда $\forall n \in \mathrm{N}$ үшін $i_n = \inf_{k\ge n} x_k = -\infty$ аламыз. Бұл жағдайда тізбектің төменгі шегі минус шексіздікке тең деп атайды да $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$ немесе $\lim_{k\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = -\infty$ деп жазады.

Сонымен, барлық келтірілген жағдайларды ескере отырып, $\{x_k\}$ тізбегінің төменгі шегінің анықтамасын қысқаша былай

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k$$

жазамыз.

Дәл осылай егер $\{x_k\}$ тізбегі жоғарыдан шектелген болса, онда $s_n = \sup_{k\ge n} x_k$ тізбегін қарастырамыз, ал кез-келген $n \in \mathrm{N}$ үшін $s_n \ge s_{n+1}$ болғандықтан $\{s_n\}$ тізбегінің шегі $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ ақырлы сан немесе $s_n \to -\infty$ болады. Осы $L = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k$ санын $\{x_k\}$ тізбегінің жоғарғы шегі деп атап, $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k$ арқылы белгілейді.

Егер $s_n \to -\infty$ болса, онда жоғарғы шек минус шексіздікке тең деп және $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = -\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = -\infty$ деп жазу қабылданған. Егер берілген тізбек жоғарыдан шектелмеген болса, онда $\forall\, n \in \mathrm{N}$ үшін $s_n = \sup_{k\ge n} x_k = +\infty$ екенін аламыз. Бұл жағдайда тізбектің жоғарғы шегі плюс шексіздікке тең деп айтады да, былай $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = +\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = +\infty$ деп жазады. Сөйтіп,

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k .$$

Бірнеше мысал келтірейік.

1. $x_k = (-1)^k,\ k \in \mathrm{N}$, тізбегі үшін

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} (-1)^k = -1$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

2. $x_k = k^{(-1)^k},\ k \in \mathrm{N}$ тізбегі үшін

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

**3.** $x_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$, $k \in N$, тізбегі үшін

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, n = 2m+1 \\ -\dfrac{1}{n+1}, n = 2m \end{cases} = 0,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, n = 2m+1 \\ \dfrac{1}{n}, n = 2m \end{cases} = 0.$$

**4.** $x_k = -k^2$, $k \in N$, тізбегі үшін

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} (-k^2) = -\infty,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left(-k^2\right) = -\infty.$$

Берілген сандық $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік немесе Коши тізбегі деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N$ нөмірі табылып, барлық $n > N, m > N$ үшін $|x_n - x_m| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Мұның кванторлар арқылы жазылуын келтірейік:

$\{x_n\}$-фундаментальді $:= \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathrm{N},\ \forall n > N \forall m > N \left(|x_n - x_m| < \varepsilon\right)$.

Енді Коши тізбегі болмайтын тізбектің кванторлар арқылы жазылуын келтірейік: $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік емес:

$$:= \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathrm{N},\ \exists n(N) > N \quad \exists m(N) > N \ \left(|x_{n(N)} - x_{m(N)}| \geq \varepsilon\right), \qquad (1)$$

яғни егер тиянақты $\varepsilon$ оң саны үшін $N$ натурал саны қандай болмасын нөмірлері одан үлкен, ал мәндерінің айырымы алған $\varepsilon$ санынан кем болмайтын мүшелері бар болса, ондай тізбек Коши тізбегі емес.

**Мысалы**. $(-1)^n$ тізбегі фундаментальдік емес. Шынында да, тиянақты $\varepsilon = 1$ санын алсақ, онда кез-келген $N \in \mathrm{N}$ үшін $|x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$, яғни (1) анықтама бойынша $\{x_n\} = (-1)^n$ тізбегі фундаментальдік емес.

**1-теорема.** Егер $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік болса, онда ол шектеулі.

**2-теорема(Коши критерийі).** $\{x_n\}$ тізбегінің жинақты болуы үшін оның фундаментальдік болуы қажетті және жеткілікті.

**Дәлелдеуі. Қажеттілігі.** Айталық $\{x_n\}$ тізбегі жинақты және оның шегі $a$ болсын. Сонда мұның фундаментальдік екенін көрсетейік.

$$x_n \to a := \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \forall n > N \left( |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Демек, $n, m > N$ үшін $|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, яғни $\{x_n\}$- фундаментальдік тізбек.

**Жеткіліктілігі.** $\{x_n\}$- фундаментальдік тізбек болсын. Онда оның жинақталатын тізбек екенін көрсетейік. 1-теорема бойынша $\{x_n\}$-шектеулі тізбек, ал Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша одан белгілі бір $a$ санына жинақталатын $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегін бөліп алуға болады. Енді $\{x_n\}$ тізбегінің осы $a$ санына жинақталатынын дәлелдейік.

$\{x_n\}$ фундаментальдік болғандықтан, кез-келген $\varepsilon$ оң саны үшін $N_1$ нөмірі табылып, $m, n > N_1$ болғанда $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ теңсіздігі орындалады, ал $n_k \ge n$ болғандықтан, соңғы теңсіздікте $m = n_k$ десек, $|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N_1$, теңсіздігін аламыз. $\{x_{n_k}\}$ тізбегі жинақты, сондықтан $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \ \forall n > N_2$ ( $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ ). Енді $N = \max(N_1, N_2)$ болса, онда $n > N$ нөмірінен бастап

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$